

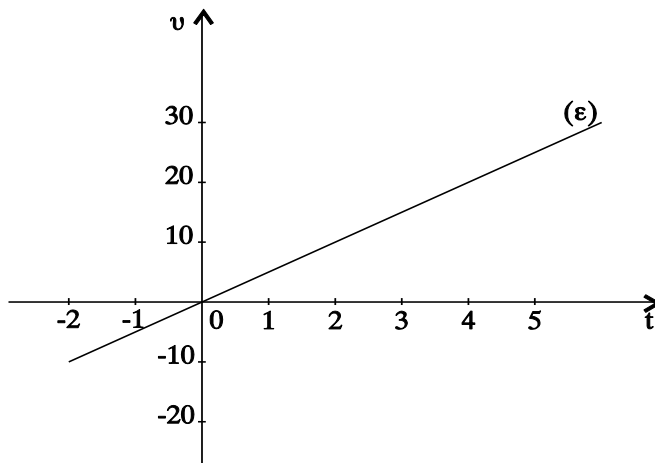
1. Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.
  - α. Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
  - β. Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.
  
2. Σ' ένα πορτοφόλι υπάρχουν 4200 €. σε χαρτονομίσματα των 50€ και 100€.
 

Πόσα 50 € και πόσα 100€ υπάρχουν στο πορτοφόλι;

  - α. Γράψε μια εξίσωση με δύο αγνώστους x και y που να λύνει το πρόβλημα.
  - β. Το πρόβλημα αυτό έχει μία ή περισσότερες λύσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
  - γ. Είναι δυνατόν ο αριθμός των 50 € (x) να είναι ίσος με τον αριθμό των 100 € (y); Αν ναι, πόσα θα είναι τα 50 € και πόσα τα 100€; Αν όχι, γιατί;
  - δ. Είναι δυνατόν τα 100 € να είναι τριπλάσια από τα 50 €; Αν ναι, πόσα θα είναι τα 50€ και πόσα τα 100€; Αν όχι, γιατί;
  
3. Δίνεται η εξίσωση  $2y + x = 7$ .
  - α. Να δείξετε ότι το ζεύγος (- 1, 4) είναι λύση αυτής της εξίσωσης.
  - β. Αν  $x = 5$  να βρείτε  $y = \dots\dots$  ώστε το ζεύγος (5, y) να είναι λύση της εξίσωσης.
  - γ. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης  $2y + x = 7$ .
  
4. Δίνεται η εξίσωση  $5x + y = 6$ .
 

Αποδείξτε ότι το ζεύγος  $(x = κ, y = 6 - 5κ), κ \in \mathbb{R}$  επαληθεύει την εξίσωση.
  
5. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σχεδιαστούν οι ευθείες που έχουν εξισώσεις τις:
 

α. $x = 2$	γ. $y = -\frac{1}{2}$	β. $y = 4$	δ. $x = y$
------------	-----------------------	------------	------------
  
6. Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση  $ax + by = γ$ , όπου  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  παριστάνει ευθεία. Η εξίσωση  $kx + (k + 1)y = 10$  παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του  $k$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
  
7. Δίνεται η εξίσωση  $v = 5t$  όπου v η ταχύτητα ενός κινητού, t ο αντίστοιχος χρόνος κίνησης και 5 (m/sec<sup>2</sup>) η επιτάχυνση.



α. Η ευθεία  $\epsilon$  του παραπάνω σχήματος παριστάνει γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης  $v = 5t$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β. Πόση θα είναι η ταχύτητα του κινητού σε 4 sec από την εκκίνησή του;

γ. Εάν μετά από τα 4 sec το κινητό διατηρήσει την ταχύτητά του σταθερή: ποια εξίσωση θα δίνει την ταχύτητά του; να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις αυτής της εξίσωσης στο παραπάνω σχήμα.

8. Οι  $x, y, \lambda$  είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει:  $x = 2 - 3\lambda$  και  $y = 5 + 2\lambda$ .

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα  $x$  και  $y$ .

β. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, πού βρίσκονται τα ζεύγη  $(x, y)$  που επαληθεύουν την παραπάνω σχέση;

γ. Να γίνει γραφική παράσταση των ζευγών αυτών σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

9. Δίνεται η εξίσωση:  $8x + 2y = 7$  (1)

α. Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

β. Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

10. Στις επόμενες ασκήσεις να γίνουν οι πράξεις, να φέρετε τις εξισώσεις στη μορφή  $ax + by = \gamma$  και στη συνέχεια να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 3(x-4) + 2(y+2) = -9 \\ (x-5) - 4(y-3) = 26 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{x-3}{14} = \frac{y-0.5}{5} \\ 3(x-3) - 8(y-0.5) = 1 \end{cases}$$

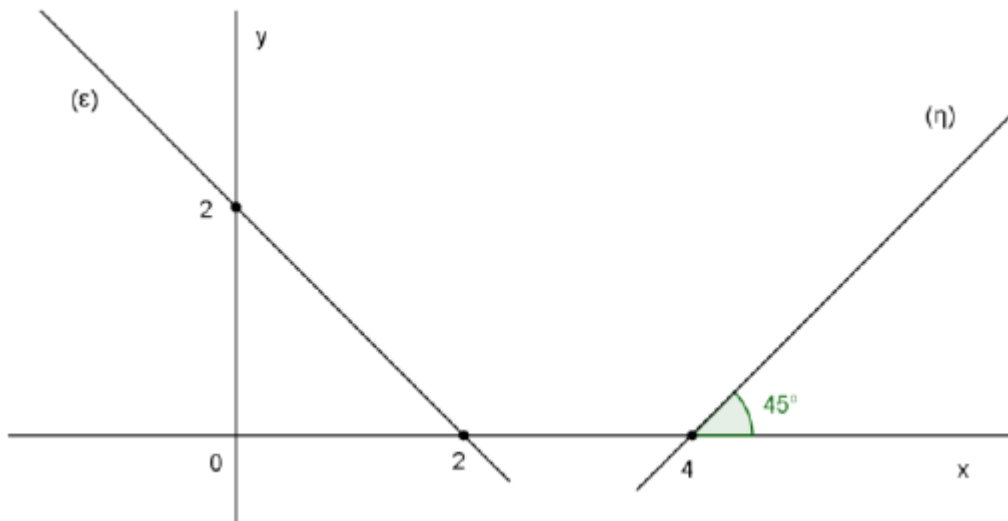
$$\gamma. \begin{cases} \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12} \\ \frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - 2x + 6 \end{cases}$$

$$\delta \begin{cases} 3(x-4) + 2(y+2) = -9 \\ (x-5) - 4(y-3) = 26 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} \frac{x-3}{14} = \frac{y-0,5}{5} \\ 3(x-3) - 8(y-0,5) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12} \\ \frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - 2x + 6 \end{cases}$$

11. α. Με βάση τα δεδομένα του σχήματος,



να

προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

12. Τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = -7 + 3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \text{ έχουν κοινή λύση}$$

το ζεύγος  $(x_0, y_0)$ . Να υπολογίσετε τα  $\lambda$  και  $\mu$  και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση του συστήματος.

13. Το ζεύγος  $(1, 3)$  είναι μια από τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}, \text{ όπου } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις των  $a, b, c$ .

14. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το σύστημα 
$$\begin{cases} -2x + y = \alpha^2 - 1 \\ 3x + 2y = \alpha^2 + 7\alpha + 5 \end{cases}$$
 έχει λύση την  $(x_0, y_0)$  για την οποία ισχύει  $x_0 \sqrt{y_0} + 3 > 0$ .
15. Για ποιες τιμές του  $k \in \mathbb{R}$  το σύστημα; 
$$\begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + 4y = 6 \end{cases}$$
 έχει λύση  $(x_0, y_0)$  τέτοια ώστε  $x_0 > 1$  και  $y_0 > 0$ ;
16. Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} (k+1)^2 x - (k+1)y = -k \\ (\lambda-1)x + (5-2\lambda)y = k+4 \end{cases}$$
, με  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ .  
Να βρείτε τα  $k, \lambda$  ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση το  $(1, 1)$
17. \*Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} (\lambda+1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda-1)y = -6 \end{cases}$$
, με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
α. Αν  $\lambda = -3$ , να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.  
β. Αν  $\lambda = 3$ , να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.  
γ. Αν  $\lambda = 0$ , να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.
18. \*Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$$
 με παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .  
α. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος  $(2, -3)$ .  
β. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.
19. Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων Α και Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α συνδικαλιστικού φορέα και 2 του Β συνδικαλιστικού φορέα τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια των ψηφοδελτίων του Β. Πόσα ψηφοδέλτια κάθε συνδικαλιστικού φορέα υπήρχαν αρχικά στην κάλπη;
20. Δύο κινητά κινούνται ευθύγραμμα στο επίπεδο, το πρώτο από το σημείο  $(-2, 1)$  προς το  $(10, 10)$  και το δεύτερο από το  $(-5, 5)$  προς το  $(10, -2)$ . Να βρείτε το κοινό σημείο της διαδρομής τους.

21. Σε τρίγωνο ABΓ η εξωτερική της γωνίας Α είναι  $120^\circ$  και η διαφορά των γωνιών Β και Γ είναι  $30^\circ$  ( $B > \Gamma$ ). Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

22. Να προσδιοριστούν οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  στην εξίσωση  $\alpha x + \beta y - 9 = 0$  εάν δοθεί ότι τα ζεύγη  $(1,1)$  και  $(-1, 5)$  είναι λύσεις της εξίσωσης αυτής.

23. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$\alpha(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 8 \\ x & x+3 \end{vmatrix} \text{ και } \beta(x) = 2x - 2, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να υπολογίσετε την παράσταση  $\alpha(x)$ ,

β. Να βρείτε για ποια  $x$  είναι  $\alpha(x) \geq \beta(x)$

24. Να δείξετε ότι  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\chi^2 + \psi^2} = |\alpha\chi + \beta\psi|$  αν και μόνο αν  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \chi & \psi \end{vmatrix} = 0$ .

25. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  να είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha - 1)\chi - \beta\psi = 2 \\ \alpha\chi + \psi = 0 \end{cases} \quad \Sigma_2: \begin{cases} \chi + 3\psi = 1 \\ -\chi + \alpha\psi = 2 \end{cases}$$

26. Δίνονται τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha + 1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \Sigma_2: \begin{cases} x + (\beta + 2)y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha - 1)y = \beta^3 \end{cases}$$

Δείξτε ότι αν το πρώτο έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

27. Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} 2\chi - 3\psi = 11 - \lambda \\ \chi + 5\psi - \lambda = 7 \end{cases}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Αποδείξτε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ .

β. Υπολογίστε τα  $x$  και  $y$ .

γ. Για ποια τιμή του  $\lambda$  η λύση  $(x_0, y_0)$  που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση:

$$x_0 + y_0 = \frac{11}{13}.$$

28. Όμοια το σύστημα:  $\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Αν  $(x_0, y_0)$  είναι η μοναδική λύση του συστήματος λύση του συστήματος να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  είναι  $2x_0 + y_0 = 2$ .

29. Δίνεται το σύστημα:  $(2\mu - 3)x + y = \mu + 4$   
 $5\mu x - 3y = 3\mu + 2, \quad \mu \in \mathbb{R}$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(10, t)$  να βρεθεί το  $t \in \mathbb{R}^*$

30. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D_x + D_y = D$$

$$D_x - D_y = 3D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

31. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y \text{ και } D \neq 0$$

Αν  $x + y = 6$ , να βρεθούν τα  $x, y$ .

32. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

α. Δείξτε ότι:  $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$ .

β. Να βρεθούν τα  $x, y$ .

33. Αν ένα γραμμικό  $2 \times 2$  σύστημα έχει ορίζουσα  $D$ , ορίζουσα του αγνώστου  $x, D_x$  και ορίζουσα του αγνώστου  $y, D_y$  και ισχύει:  $(D-1)^2 + (D_x+2)^2 + (D_y+3)^2 = 0$ .

Να βρείτε τη λύση του συστήματος.

34. Δίνονται τα συστήματα :

$$(\Sigma_1) \begin{cases} (k+1)x + 2\lambda y = 2 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} (2k+1)x + (\lambda+7)y = -6 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \quad \text{όπου } k, \lambda \in \mathbb{R} .$$

α. Για ποιες τιμές των  $k, \lambda$  τα συστήματα αυτά έχουν συγχρόνως άπειρες λύσεις

β. Για τις τιμές των  $k, \lambda$  που βρήκατε στο α ερώτημα να βρείτε τις κοινές λύσεις των συστημάτων  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$ .

35. Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x - y - \omega = -4 \\ x + y + \omega = 1 \\ -x + y + \omega = 3 \end{cases} .$$

36. Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} x + y + \omega = 0 \\ 2x + 4y + 3\omega = 0 \\ 3x + 3y + 3\omega = 0 \end{cases} .$$

37. Για τις ορίζουσες  $D$ ,  $D_x$ ,  $D_y$  ενός  $2 \times 2$  γραμμικού συστήματος ( $\Sigma$ ) ισχύουν οι σχέσεις:  $2D+3D_x-D_y=5$ ,  $D+D_x-D_y=0$ ,  $D-D_x+D_y=2$ .

Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση και να βρείτε την λύση του συστήματος ( $\Sigma$ ).

38. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(\alpha+1)x^2+(\alpha-\beta-2)x+2-\gamma$ . Βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία  $A(1, 1)$ ,  $B(-1,6)$  και  $f(0)=1$ .

39. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 52 \\ 2x - y = 1 \end{cases},$$

$$\beta. \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 2 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 7 = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ (x - y)(x + y + 1) = 50 \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = x + 2 \\ y^2 = xz \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 200 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$$

$$\theta. \begin{cases} x - y = 5 \\ xy = -4 \end{cases}$$

$$\iota. \begin{cases} y^2 - 1 = 4x^2 + 4x \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1 \end{cases}$$

40. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η ευθεία  $y = \lambda + 3$  εφάπτεται του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$ ;

41. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας  $y = 3x + 3$  και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $y = \frac{6}{x}$ .

42. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 113 \\ xy = 56 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

43. Δίνεται το σύστημα :  $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$ .

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων;

44. α. Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα  $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

β. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α..

45. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος  $x$  cm, πλάτος  $y$  cm, περίμετρο ίση με  $38$ cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά  $2$ cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά  $4$ cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β. Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων  $x, y$  του ορθογωνίου.

46. Να λύσετε τα συστήματα:

α.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 4xy = 3 \end{cases}$

γ.  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$

47. Να λύσετε τα συστήματα:

α.  $\begin{cases} x + y^2 = 13 \\ xy^2 = 36 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} |x| + y = 3 \\ \sqrt{y} + |x| = 3 \end{cases}$

γ.  $\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{(x+y)x}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .

48. Να λυθούν τα συστήματα:

α.  $\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-3} = 3 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-3} = -1 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} \sqrt{x+1} + 2\sqrt{y-2} = 3 \\ 2\sqrt{x+1} - \sqrt{y-2} = 1 \end{cases}$ ,

γ.  $\begin{cases} |2x+1| + 3|y-1| = 2 \\ |2x+1| - |y-1| = 0 \end{cases}$ .

49. Να λύσετε τα συστήματα:

α.  $\begin{cases} x-1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{w}{6} \\ 2x+3y+w-1=0 \end{cases}$

β.  $\begin{cases} \frac{t+2}{-2} = \frac{z-1}{3} = \frac{w-3}{2} \\ 2w+3z-2t+6=0 \end{cases}$